С.В.Малаховская

КОНГРУЭНЦИИ ЛИНЕЙЧАТЫХ КВАДРИК С КРАТНОЙ ФОКАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

В трехмерном проективном пространстве P_3 рассмотрена конгруэнция $\mathcal{K}_m$ линейчатых невырожденных квадрик с m-кратной невырожденной фокальной поверхностью (A_0) ($m \geqslant 2$). Найден характеристический признак конгруэнции $\mathcal{K}_2$. Исследованы подклассы конгруэнций $\mathcal{K}_4$.

Отнесем конгруэнцию $\mathcal{K}$ квадрик Q к реперу $R=\{A_0, A_1, A_2, A_3\}$, где A_0, A_3 – фокальные точки квадрики $Q \in \mathcal{K}$, а A_0A_i, A_3A_i ($i,j,k=1,2$) – ее прямолинейные образующие. Пфаффова система уравнений конгруэнции $\mathcal{K}$ имеет вид:

$$\left.\begin{array}{l} \omega_0^3=0, \quad \omega_3^0=0, \quad \omega_i^j = a^j_{ik}\,\omega^k, \quad \omega_i^3-\omega^j = c_{ik}\omega^k, \\ \omega_i^0-\omega_3^j = m_{ik}\,\omega_3^k, \quad \omega_3^i = b^i_k\,\omega^k, \quad \Omega = h_k\,\omega^k, \end{array}\right\} \quad (1)$$

где ω_α^β ($\alpha,\beta=0,1,2,3$) – компоненты деривационных формул репера R,

$$\omega_0^i=\omega^i, \quad c_{12}=c_{21}, \quad m_{12}=m_{21}, \quad \Omega=\omega_0^0-\omega_1^1-\omega_2^2+\omega_3^3, \qquad (2)$$

$i \neq j$ и по индексам i и j суммирование не производится. Квадрика Q и ассоциированные квадрики Q_i [1] определяются соответственно уравнениями:

$$\mathcal{F} \equiv x^1x^2-x^0x^3=0, \qquad (3)$$

$$\mathcal{F}_i = h_i x^1x^2 - a^j_{ii}(x^i)^2 - a^i_{ji}(x^j)^2 + \lambda_{ki}x^kx^3 + c_{ki}x^kx^0 = 0, \quad (4)$$

где

$$\lambda_{ii}=m_{ik}b^k_i, \quad \lambda_{ij}=m_{ik}b^k_j. \qquad (5)$$

Линия $\omega^i = t^i\tau$ (τ – параметрическая форма [2, с.41]) однозначно определяет инвариантную присоединенную квадрику $\mathcal{F}_t \equiv t^k\mathcal{F}_k=0$, выделяемую из пучка квадрик, содержащих характеристику $\mathcal{F}=0$, $d_t\mathcal{F}=0$ условием полярной сопряженности фокальных точек A_0 и A_3.

Назовем линией Γ_i на поверхности (A_0) линию, для которой точки A_i и A_0 полярно сопряжены относительно присоединенной квадрики $\mathcal{F}_t=0$, линией γ_i – линию, для которой присоединенная квадрика содержит точку A_i.

Обозначим:

$$c=c_{12}c_{22}-c_{12}^2, \quad p_i=c_{ij}a^i_{jj}-c_{jj}a^i_{ji}, \quad q_i=c_{ii}a^i_{jj}-c_{ij}a^i_{ji}. \quad (6)$$

Т е о р е м а 1. Существуют два и только два класса конгруэнций $\mathcal{K}_2$: конгруэнции $\mathcal{K}_2'$, определяемые с произволом шести функций двух аргументов, и конгруэнции $\mathcal{K}_2''$, определяемые с произволом пяти функций двух аргументов. Конгруэнция $\mathcal{K}$ тогда и только тогда является конгруэнцией $\mathcal{K}_2'$, когда линии Γ_1 и Γ_2 совпадают. Конгруэнция $\mathcal{K}$ тогда и только тогда является конгруэнцией $\mathcal{K}_2''$, когда линия Γ_1 совпадает с линией γ_1, а линия Γ_2 – с линией γ_2.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Условия двухкратности фокальной точки A_0 имеют вид:

$$c p_1=0, \quad c p_2=0. \qquad (7)$$

Следовательно, выделяются только два класса конгруэнций $\mathcal{K}_2$: конгруэнции $\mathcal{K}_2'$ ($c=0$) и конгруэнции $\mathcal{K}_2''$ ($p_1=0$, $p_2=0$). Линии Γ_i и γ_i определяются соответственно уравнениями:

$$c_{ii}\,\omega^i + c_{ij}\,\omega^j = 0, \quad a^j_{ii}\,\omega^i + a^j_{ij}\,\omega^j = 0. \qquad (8)$$

Сравнивая (7) и (8), убеждаемся в справедливости теоремы.

О п р е д е л е н и е I. Конгруэнцией $\mathcal{N}$ называется конгруэнция $\mathcal{K}$, у которой обе ассоциированные квадрики Q_1, Q_2 являются конусами с вершиной A_0.

Т е о р е м а 2. Конгруэнции $\mathcal{N}$ существуют и определяются с произволом четырех функций двух аргументов. Они являются конгруэнциями $\mathcal{K}_4$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем:

$$c_{11} = c_{22} = c_{12} = 0, \quad k_i + 2a^j_{ij} = 0. \tag{9}$$

Учитывая (9) в системе (1), убеждаемся в справедливости первой части теоремы. Обозначим:

$$\xi = \frac{x^1}{x^0}, \quad \eta = \frac{x^2}{x^0}, \quad \zeta = \frac{x^3}{x^0}. \tag{10}$$

Система уравнений для определения фокальных точек квадрики $Q \in \mathcal{N}$ принимает вид:

$$\xi\eta - \zeta = 0, \quad \xi^4 \varphi_1(\xi) = 0, \quad \eta^4 \varphi_2(\eta) = 0, \tag{11}$$

где $\varphi_i(x)$ -многочлены третьей степени. Следовательно, A_0-четырехкратная фокальная точка. Теорема доказана.

О п р е д е л е н и е 2. Конгруэнцией $\mathcal{M}$ называется конгруэнция $\mathcal{K}_2'$, являющаяся конгруэнцией $\mathcal{K}_2''$, но не являющаяся конгруэнцией $\mathcal{N}$. Конгруэнции $\mathcal{M}$ определяются с произволом четырех функций двух аргументов.

Т е о р е м а 2. Конгруэнции $\mathcal{M}$ являются конгруэнциями $\mathcal{K}_2'$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Конгруэнции $\mathcal{K}_3$ с трехкратной фокальной поверхностью (A_0) характеризуются соотношениями (7) и

$$c(k_i a^i_{jj} - k_j a^i_{ji} + \lambda_{ji} c_{jj} - \lambda_{jj} c_{ij}) + p_i(k_j c_{ii} - k_i c_{ij} + q_j) + q_i^2 = 0. \tag{12}$$

Для конгруэнции $\mathcal{M}$, получаем

$$c = 0, \quad p_i = 0, \tag{13}$$

откуда следует $q_i = 0$. Так как соотношения (7) и (12) удовлетворяются, то конгруэнция $\mathcal{M}$ является конгруэнцией $\mathcal{K}_3$. Теорема доказана.

О п р е д е л е н и е 3. Конгруэнцией $\mathcal{N}'$ называется конгруэнция $\mathcal{N}$, у которой $A_1 \in Q_2$; $A_2 \in Q_1$.

Т е о р е м а 3. Конгруэнции $\mathcal{N}'$ существуют и определяются с произволом двух функций двух аргументов. Линия пересечения с квадрикой Q квадрики Ли $\widetilde{Q}$ поверхности (A_0) конгруэнции $\mathcal{N}'$ образована парой сдвоенных асимптотических касательных A_0A_i. Квадрики Q и $\widetilde{Q}$ совпадают тогда и только тогда, когда одна из ассоциированных квадрик Q_i содержит плоскость $(A_j A_3 A_0)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Конгруэнции $\mathcal{N}'$ определяются уравнениями (1), (9) и соотношениями:

$$a^j_{ij} = 0, \quad \lambda_{12} = \lambda_{21}. \tag{14}$$

Следовательно, $S_1 = 6$, $q = 8$, $S_2 = 2$, $Q = N = 10$, т.е. конгруэнции $\mathcal{N}'$ определяются с произволом двух функций двух аргументов.

Уравнение квадрики Ли $\widetilde{Q}$ поверхности (A_0) имеет вид:

$$x^1 x^2 - x^0 x^3 + \lambda_{12}(x^3)^2 = 0. \tag{15}$$

Условие $\lambda_{12} = 0$ эквивалентно принадлежности плоскости $(A_j A_3 A_0)$ ассоциированной квадрике Q_i. Теорема доказана.

Список литературы

I. М а л а х о в с к и й В.С. Конгруэнции линейчатых квадрик в трехмерном проективном пространстве.-В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.8. Калининград, 1977, с. 32-38.

2. Л а п т е в Г.Ф. Распределения касательных элементов.-В кн.: Тр. геометр. семинара. М., 1971, т.3, с.29-48.